

Approval with Runoff

Théo Delemazure¹ Jérôme Lang¹ Jean-François Laslier² M. Remzi Sanver¹

¹LAMSADE, Université Paris Dauphine, PSL, CNRS ²CNRS, Paris School of Economics, PSL

CNIA 2022

Elections à vainqueur unique

Un ensemble de votants v_1, \dots, v_n

Un ensemble de candidats $\mathcal{C} = \{\text{Ann, Bob, Carl, Dan}, \dots\}$

Elections à vainqueur unique

Un ensemble de votants v_1, \dots, v_n

Un ensemble de candidats $\mathcal{C} = \{\text{Ann, Bob, Carl, Dan}, \dots\}$



Les votants donnent leurs préférences sur les candidats

Elections à vainqueur unique

Un ensemble de votants v_1, \dots, v_n

Un ensemble de candidats $\mathcal{C} = \{\text{Ann, Bob, Carl, Dan}, \dots\}$



Les votants donnent leurs préférences sur les candidats



Une règle de vote est utilisée pour sélectionner le vainqueur

Elections à vainqueur unique

Un ensemble de votants v_1, \dots, v_n

Un ensemble de candidats $\mathcal{C} = \{\text{Ann, Bob, Carl, Dan}, \dots\}$



Les votants donnent leurs préférences sur les candidats



Une règle de vote est utilisée pour sélectionner le vainqueur

⇒ On utilise **Plurality with Runoff** ! (scrutin majoritaire à deux tours)

Premier tour: les votants votent pour leur candidat favori

candidates	Ann	Bob	Carl	Dan
scores	28%	30%	20%	22%

Premier tour: les votants votent pour leur candidat favori

candidates	Ann	Bob	Carl	Dan
scores	28%	30%	20%	22%



Les deux candidats avec le meilleur score vont au second tour

Second tour: vote majoritaire

candidates	Ann	Bob
scores	54%	46%

Plurality with Runoff

Premier tour: les votants votent pour leur candidat favori

candidates	Ann	Bob	Carl	Dan
scores	28%	30%	20%	22%



Les deux candidats avec le meilleur score vont au second tour

Second tour: vote majoritaire

candidates	Ann	Bob
scores	54%	46%



Ann

Monotonie

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ remporte l'élection, et un votant change son vote pour voter pour a , alors a doit rester un vainqueur.

Monotonie \Rightarrow **Non satisfaite**

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ remporte l'élection, et un votant change son vote pour voter pour a , alors a doit rester un vainqueur.

Monotonie \Rightarrow Non satisfaite

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ remporte l'élection, et un votant change son vote pour voter pour a , alors a doit rester un vainqueur.

Participation

Un votant n'est jamais strictement plus satisfait par le résultat de l'élection s'il s'abstient que s'il vote.

Plurality with Runoff : Une bonne règle ?

Monotonie \Rightarrow **Non satisfaite**

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ remporte l'élection, et un votant change son vote pour voter pour a , alors a doit rester un vainqueur.

Participation \Rightarrow **Non satisfaite**

Un votant n'est jamais strictement plus satisfait par le résultat de l'élection s'il s'abstient que s'il vote.

Plurality with Runoff : Une bonne règle ?

Monotonie \Rightarrow **Non satisfaite**

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ remporte l'élection, et un votant change son vote pour voter pour a , alors a doit rester un vainqueur.

Participation \Rightarrow **Non satisfaite**

Un votant n'est jamais strictement plus satisfait par le résultat de l'élection s'il s'abstient que s'il vote.

Mais aussi **Condorcet-cohérence**, **renforcement**, et **résistance au clonage**

Résistance au clonage

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

candidats	Ann	Bob	Carl	Dan	⇒	candidats	Ann	Bob
scores	28%	30%	20%	22%		scores	54%	46%

Résistance au clonage \Rightarrow Non satisfaite

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

candidats	Ann	Bob	Bobby	Carl	Dan	\Rightarrow	candidats	Ann	Dan
scores	28%	21%	9%	20%	22%		scores	48%	52%

Résistance au clonage \Rightarrow Non satisfaite

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

candidats	Ann	Bob	Bobby	Carl	Dan	\Rightarrow	candidats	Ann	Dan
scores	28%	21%	9%	20%	22%		scores	48%	52%

- Ce problème arrive souvent, par exemple à l'élection présidentielle de 2002.
- Cela force les votants à voter stratégiquement (aussi appelé "vote utile") et non pour leur candidat favori.

Plurality with runoff : Une bonne règle ?

Pareto-efficace \Rightarrow **Satisfaite**

Si tous les votants préfèrent un candidat a au candidat b , alors b ne doit pas remporter l'élection.

Critère du perdant de Condorcet \Rightarrow **Satisfaite**

Un candidat qui perdrait un second tour contre n'importe quel autre candidat ne peut pas remporter l'élection.

C'est également un mode de scrutin très **simple à mettre en place**.

Peut-on garder **les bénéfices d'un protocole en deux tours** sans avoir à supporter les **défauts nombreux du vote uninominal** au premier tour ?

⇒ On pourrait par exemple remplacer les bulletins uninominaux du premier tour par des **bulletins d'approbation**.

Premier tour : les votants peuvent voter pour autant de candidats qu'ils le souhaitent

Premier tour : les votants peuvent voter pour autant de candidats qu'ils le souhaitent



A partir de ces votes d'approbation, on utilise une **règle d'approbation à gagnants multiples** pour choisir deux finalistes

Premier tour : les votants peuvent voter pour autant de candidats qu'ils le souhaitent



A partir de ces votes d'approbation, on utilise une **règle d'approbation à gagnants multiples** pour choisir deux finalistes



Second tour : vote majoritaire

$P = \langle (A_1, \succ_1), \dots, (A_n, \succ_n) \rangle$ un **approval-preferences profile** tel que chaque votant v_i est associé à un **bulletin d'approbation** $A_i \subseteq \mathcal{C}$ et un **classement** \succ_i

$V = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ un **profil d'approbation**

$S_V(c) = |\{i | c \in A_i\}|$ est le **score d'approbation** de c

F une **règle d'approbation à deux gagnants** (irrésolue) que prend en entrée un profil d'approbation V et renvoie une paire de finalistes dans \mathcal{C}

F^R une **règle d'approbation à deux tours** (irrésolue) qui s'appuie sur F et prend en entrée un approval-preferences profile P et renvoie un gagnant dans \mathcal{C}

Multi-winner Approval Voting

Multi-winner Approval Voting: MAV

Les deux finalistes sont les deux candidats avec le plus haut score d'approbation

	Candidats approuvés
10	Bob
20	Ann, Bob, Carl
30	Ann, Bob
20	Carl, Dan
5	Dan

⇒

c	$S_V(c)$
Ann	50
Bob	60
Carl	40
Dan	25

⇒ {Bob, Ann}

Multi-winner Approval Voting

Multi-winner Approval Voting: MAV

Les deux finalistes sont les deux candidats avec le plus haut score d'approbation

	Candidats approuvés
10	Bob, Bobby
20	Ann, Bob, Bobby, Carl
30	Ann, Bob, Bobby
20	Carl, Dan
5	Dan

⇒

c	$S_V(c)$
Ann	50
Bob	60
Bobby	60
Carl	40
Dan	25

⇒ {Bob, Bobby}

Résistance au clonage \Rightarrow Non satisfaite

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

Monotonie \Rightarrow Satisfaite

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ est vainqueur de l'élection, et qu'un votant qui ne l'approuvait pas change son vote pour l'approuver, alors a reste le vainqueur.

Chamberlin-Courant Approval Voting

Chamberlin-Courant Approval Voting: CCAV

Les deux finalistes sont les deux candidats qui intersectent le plus de bulletins d'approbation à eux deux

	Candidats approuvés
10	Bob
20	Ann, Bob, Carl
30	Ann, Bob
20	Carl, Dan
5	Dan

⇒

c	score
Bob, Ann	60
Bob, Carl	80
Bob, Dan	85
...	...

⇒ {Bob, Dan}

Chamberlin-Courant Approval Voting

Chamberlin-Courant Approval Voting: CCAV

Les deux finalistes sont les deux candidats qui intersectent le plus de bulletins d'approbation à eux deux

	Candidats approuvés
10	Bob, Bobby
20	Ann, Bob, Bobby, Carl
30	Ann, Bob, Bobby
20	Carl, Dan
5	Dan

⇒

c	score
Bob, Ann	60
Bob, Carl	80
Bob, Dan	85
Bob, Bobby	60
...	...

⇒ {Bob, Dan}

Résistance au clonage \Rightarrow Satisfaite

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

Monotonie \Rightarrow Non satisfaite

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ est vainqueur de l'élection, et qu'un votant qui ne l'approuvait pas change son vote pour l'approuver, alors a reste le vainqueur.

Résistance au clonage \Rightarrow **Satisfaite**

Si on introduit un nouveau candidat qui est un clone d'un candidat existant dans l'élection, cela ne doit pas changer le résultat de l'élection.

Monotonie \Rightarrow **Non satisfaite**

Si un candidat $a \in \mathcal{C}$ est vainqueur de l'élection, et qu'un votant qui ne l'approuvait pas change son vote pour l'approuver, alors a reste le vainqueur.

Theorem

Aucune règle AVR est résistante au clonage, monotone et neutre

Ces règles font partie de la famille plus générales des α AV-rules

$$\alpha AV(V) = \operatorname{argmax}_{x,y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - \alpha S_V(xy)$$

$S_V(x)$ est le nombre de votants qui approuvent x

$S_V(xy)$ est le nombre de votants qui approuvent à la fois x et y

$$MAV(V) = \operatorname{argmax}_{x,y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y)$$

$$PAV(V) = \operatorname{argmax}_{x,y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - \frac{1}{2} S_V(xy)$$

$$CCAV(V) = \operatorname{argmax}_{x,y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - S_V(xy)$$

Proportional Approval Voting

Proportional Approval Voting: PAV

$$\text{PAV}(V) = \operatorname{argmax}_{x,y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - \frac{1}{2}S_V(xy)$$

	Candidats approuvés
10	Bob,
20	Ann, Bob, Carl
30	Ann, Bob
20	Carl, Dan
5	Dan

⇒

c	score
Bob, Ann	$60 + 50 - \frac{1}{2}50 = 85$
Bob, Carl	$60 + 40 - \frac{1}{2}20 = 90$
Bob, Dan	$60 + 25 - 0 = 85$
...	...

⇒ {Bob, Carl}

Chamberlin-Courant Approval Voting: CCAV

Les deux finalistes sont les deux candidats qui intersectent le plus de bulletins d'approbation à eux deux

	Candidats approuvés
10	Bob,
40	Ann, Bob
40	Ann, Carl
10	Carl

⇒

c	score
Bob, Carl	100
Ann, Bob	90
Ann, Carl	90

⇒ {Bob, Carl}

Cependant Ann est approuvée par 80% des votants et les autres candidats par 50% chacun

Favori-cohérence

Au moins un finaliste obtient le score d'approbation le plus élevé

⇒ **MAV** satisfait cette propriété, mais pas **CCAV** et **PAV**,
Nous avons donc défini des versions séquentielles de ces règles:

Favori-cohérence

Au moins un finaliste obtient le score d'approbation le plus élevé

⇒ **MAV** satisfait cette propriété, mais pas **CCAV** et **PAV**,

Nous avons donc défini des versions séquentielles de ces règles:

1. Le premier finaliste sélectionné x est celui avec le plus haut score d'approbation (i.e. il maximise $S_V(x)$).

Favori-cohérence

Au moins un finaliste obtient le score d'approbation le plus élevé

⇒ **MAV** satisfait cette propriété, mais pas **CCAV** et **PAV**,

Nous avons donc défini des versions séquentielles de ces règles:

1. Le premier finaliste sélectionné x est celui avec le plus haut score d'approbation (i.e. il maximise $S_V(x)$).
2. Le deuxième finaliste y est celui qui maximise le score de la règle quand il est associé à x .

⇒ Au lieu de regarder toutes les paires possible, on force le premier finaliste de la paire à être x

Sequential α AV-rules

Le premier finaliste x maximise le score d'approbation $S_V(x)$ et le second finaliste y maximise $S_V(x) + S_V(y) - \alpha S_V(xy)$

$$\text{S-MAV}(V): \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y)$$

$$\text{S-PAV}(V): \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - \frac{1}{2} S_V(xy)$$

$$\text{S-CCAV}(V): \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{C}} S_V(x) + S_V(y) - S_V(xy)$$

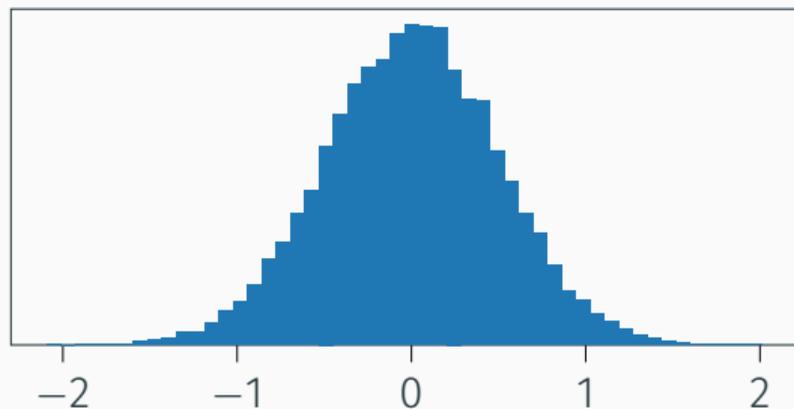
Notons que S-MAV et MAV sont équivalents

	MAV^R	$S-PAV^R$	$S-CCAV^R$	PAV^R	$CCAV^R$
Pareto-efficace	✓	✓	~	✓	~
monotone	✓				
résistant au clonage			✓		✓
favori-cohérence	✓	✓	✓		

Simulations avec des préférences Euclidiennes 1D

- Distribution gaussienne des votants, centrée en 0
- Distribution uniforme des candidats sur $[-1, 1]$
- Un votant **approuve tous les candidats qui sont à une distance $\leq d$** (distance d'approbation)

Distribution des votants



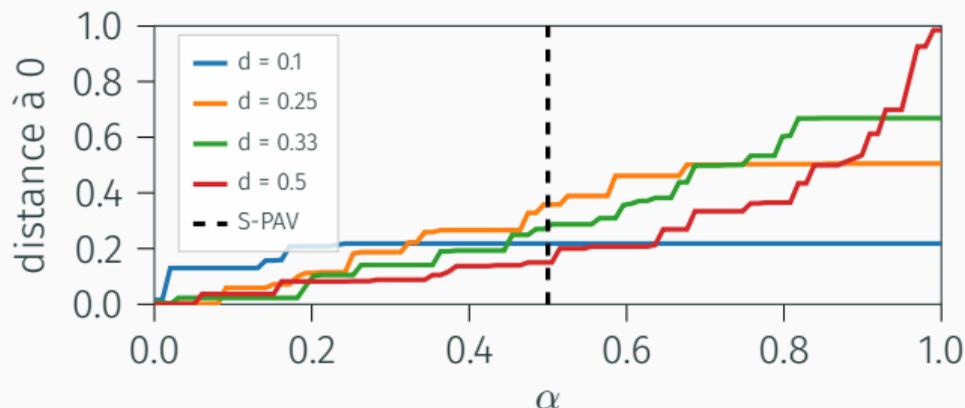
⇒ Quelle sont **les positions des deux finalistes** selon la règle utilisée ?

Sequential α AV-rules

Le premier finaliste x maximise le score d'approbation $S_V(x)$ et le second finaliste y maximise $S_V(x) + S_V(y) - \alpha S_V(xy)$

0 est toujours le premier finaliste. A quelle position se trouve le second finaliste ?

Position du second finaliste pour différentes valeurs de d



Nous avons utilisé plusieurs jeux de données de vote par approbation. On ne s'intéresse ici qu'au résultat du premier tour.

- Datasets de **l'élection présidentielles de 2017 (Voter Autrement 2017, Bouveret et al.)** dans plusieurs villes française, chaque dataset comptant ~ 1000 votants et 11 candidats.
- Datasets d'une **poster competition**, collectés pendant une école d'été en Choix Social Computationel à San Sebastien en 2016 (Disponible sur **PrefLib**), 17 candidats, ~ 60 votants par dataset.
- Bonus : Dataset de **l'élection présidentielle 2022** obtenu via l'expérience en ligne "Un autre vote 2022", 1300 votants et 12 candidats.

Résultats sur des données réelles

	MAV	PAV	S-PAV	CCAV	S-CCAV
2017-Strasbourg	EM / JLM				
2017-Grenobles	BH / EM	EM / JLM	EM / BH	BH / FF	BH / FF
2017-Crolles	EM / JLM	EM / JLM	EM / JLM	EM / MLP	EM / MLP
Best-Poster-A	P. 1 / P. 2	P. 1 / P. 4	P. 1 / P. 4	P. 1 / P. 6	P. 1 / P. 6
Best-Poster-B	P. 1 / P. 2				
Bonus: 2022	YJ / JLM	YJ / MLP	YJ / MLP	YJ / MLP	YJ / MLP

- Le vote par approbation à deux tours n'est pas une règle mais une **famille de règle**, paramétrée par la fonction choisie pour déterminer les finalistes.
- Nos résultats **axiomatiques** et **expérimentaux** montrent que le choix de cette fonction peut changer beaucoup de choses, et donc doit être fait de manière réfléchi.

Merci de votre attention !